

Équations différentielles – Primitives d’une fonction

Laurent ZAMO

Résumé

Cours de mathématiques en Terminale scientifique.

Table des matières

1	Préambule	2
1.1	Exemple : position d’un mobile	2
1.2	Exemple : radioactivité	2
1.3	Exemple : Circuit RL	2
2	Primitives d’une fonction	3
2.1	Définition et existence	3
2.2	Forme des primitives	3
2.3	Calcul	4
2.3.1	Fonctions de référence	4
2.3.2	Somme	4
2.3.3	Produit par une constante	4
2.3.4	Composée	4
3	Équation différentielle $y' = ay$	5
4	Équation différentielle $y' = ay + b$	5

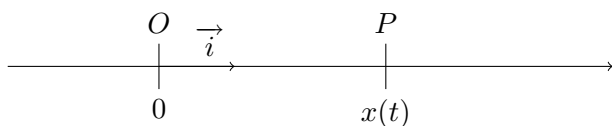
1 Préambule

Si y est une grandeur fonction du temps t , sa dérivée $y' = \frac{dy}{dt}$ représente la vitesse de y . Sa dérivée seconde y'' (la dérivée de la dérivée) est l'accélération de y . De nombreux problèmes lient une grandeur avec sa vitesse ou son accélération, c'est-à-dire une fonction avec sa dérivée ou sa dérivée seconde.

Définition 1. Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction et qui fait apparaître une ou plusieurs dérivées successives de cette fonction.

Remarque 1. Les équations servant souvent à résoudre des problèmes dépendant du temps, la variable est en général notée t .

1.1 Exemple : position d'un mobile



Un point mobile P se déplace sur une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$. On note x l'abscisse de ce

point sur la droite, en fonction du temps t . Si le solide se déplace à une vitesse $v(t)$, la fonction x a pour dérivée la fonction v , on dit que x est une solution de l'équation différentielle :

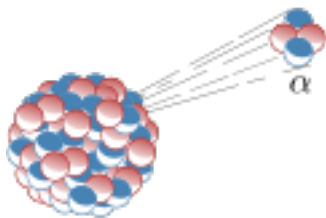
$$x' = v(t) \quad (1)$$

Exercice 1. 1. On suppose que v est constante, égale à $5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Justifier que toute fonction affine de coefficient directeur égal à 5 est une solution de l'équation précédente.

2. Déterminer une solution de cette équation différentielle lorsque :

$$(a) \ v(t) = \cos(t) \quad | \quad (b) \ v(t) = t^2 \quad | \quad (c) \ v(t) = e^{3t}$$

1.2 Exemple : radioactivité



Émission d'une particule alpha d'un atome.
(Source : wikipedia)

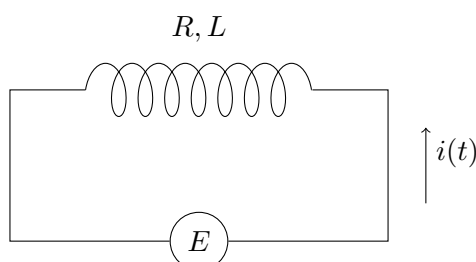
Étant donnée une substance radioactive, le nombre N de noyaux radioactifs diminue en fonction du temps, la vitesse de désintégration étant proportionnelle au nombre de noyaux restants. La fonction N vérifie ainsi l'équation différentielle :

$$N' = -\lambda N \quad (2)$$

où $\lambda > 0$ est une constante réelle caractéristique de l'élément considéré.

Exercice 2. Vérifier que toute fonction $N_{\lambda,k}$ définie sur $[0; +\infty[$ par $N_{\lambda,k}(t) = Ke^{-\lambda t}$ (où K est une constante réelle) est solution de l'équation différentielle précédente.

1.3 Exemple : Circuit RL



Sur un circuit électrique, aux bornes d'une bobine de résistance R ohms, d'inductance L henrys, on branche, à l'instant $t = 0$, un générateur de force électromotrice E volts. Alors l'intensité i du circuit, en ampères, vérifie l'équation différentielle :

$$L \cdot i' + R \cdot i = E. \quad (3)$$

2 Primitives d'une fonction

2.1 Définition et existence

Définition 2. Si F est une fonction de dérivée $F' = f$ sur un intervalle I , on dit que F est une *primitive* de f .

Déterminer les primitives d'une fonction f revient à résoudre l'équation différentielle $y' = f(t)$ d'inconnue y .

Exemple 1. Le problème 1.1 revient à chercher une primitive de la fonction vitesse v .

Exercice 3. Déterminer une primitive de chacune des fonctions cos, sin, exponentielle.

Théorème 1. Existence

On admet que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

2.2 Forme des primitives

Théorème 2. Si f admet une primitive F sur un intervalle I , alors elle en admet une infinité : ce sont toutes les fonctions de la forme $F + k$, où k est une constante réelle.

Démonstration. Si $G = F + k$, alors $G' = F' + k' = F' + 0 = F' = f$. Donc si F est une primitive de f , alors $F + k$ est aussi une primitive de f .

Réciproquement. Prouvons que, si G est une primitive de f , alors $G = F + k$ avec k constante.

Si $G' = f$, alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Or, si la dérivée d'une fonction est nulle sur un intervalle I , alors cette fonction est constante. Donc $G - F = k$ et $G = F + k$. $\square$

Exemple 2. Exemples de primitives

1. Comme la fonction cosinus admet pour primitive la fonction sinus sur $\mathbf{R}$, les primitives de la fonction cosinus sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \sin(t) + k$, avec k constante.
2. Comme la fonction exponentielle est sa propre primitive sur $\mathbf{R}$, les primitives de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^t + k$, avec k constante.

Conséquence du théorème.

Si f admet une primitive F sur un intervalle I , alors, pour tout $a \in I$ et tout réel b , il existe une unique fonction G primitive de f telle que $G(a) = b$.

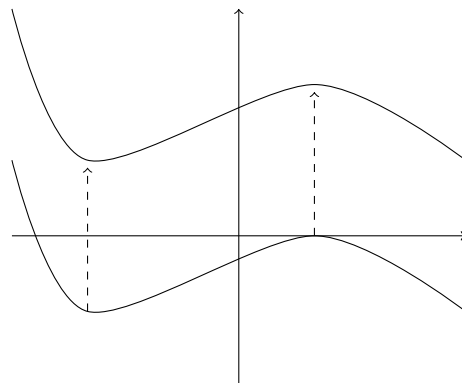
Démonstration. Si G vérifie les conditions demandées, alors $G(t) = F(t) + k$ pour tout $t \in I$, donc $G(a) = F(a) + k$. Or $G(a) = b$ donc $b = F(a) + k$ et $k = b - F(a)$, k est bien déterminé de manière unique. La fonction G définie par $G(t) = F(t) + b - F(a)$ est l'unique primitive de f telle que $G(a) = b$. $\square$

Méthode. Pour déterminer la primitive d'une fonction répondant à une condition, on détermine d'abord la forme générale des primitives, puis on ajuste la constante additive k . Il faut bien lire la consigne du problème : faut-il déterminer *une* primitive quelconque ? (*toutes*) les primitives ? ou une primitive particulière ?

Graphiquement.

Si deux fonctions dérivables diffèrent d'une constante, elles ont les mêmes variations et des dérivées égales. Leurs courbes représentatives sont images l'une de l'autre par une translation de vecteur $k\vec{j}$, où $\vec{j}$ est le deuxième vecteur du repère.

La connaissance de la dérivée d'une fonction permet de connaître ses variations, mais pas la « hauteur » à laquelle est placée sa courbe sur le graphique. On ne connaît la fonction qu'à une constante additive près.



2.3 Calcul

2.3.1 Fonctions de référence

Pour déterminer une primitive d'une fonction de référence, on lit le tableau des dérivées « à l'envers ».

Exemple 3. 1. $\sin$ admet pour dérivée $\cos$, donc $\cos$ admet pour primitive $\sin$.

2. La fonction carré admet pour dérivée la fonction $x \mapsto 2x$, donc la fonction carré et toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + K$ sont des primitives de $x \mapsto 2x$.

Voir premier tableau de la page 66 du manuel.

2.3.2 Somme

Théorème 3. Si u et v sont deux fonctions qui admettent pour primitives respectives U et V sur un intervalle I , alors $U + V$ est une primitive de $u + v$ sur I .

Démonstration. À faire... □

2.3.3 Produit par une constante

Théorème 4. Si U est une primitive de u sur un intervalle I , alors, pour toute constante réelle k , $k \cdot U$ est une primitive de $k \cdot u$ sur I .

Démonstration. À faire... □

Exercice 4. T.D. 6 page 75 (partie 6.1 uniquement)

2.3.4 Composée

Voir deuxième tableau de la page 66 du manuel, auquel on peut ajouter les lignes suivantes :

fonction	une primitive	validité
$f = u'e^u$	$F = e^u$	sur I
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	u ne s'annule pas sur I

Démonstration. À faire... □

Exercice 5. 1. T.D. 6 page 75 (fin)

2. ex 41 p 110

3. ex 43 p 110

4. ex 59 p 137

5. ex 64 p 137

3 Équation différentielle $y' = ay$

Théorème 5. Soit a un nombre réel. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $y(t) = Ke^{at}$, où K est une constante réelle.

Démonstration. À faire... Indication : Vérifier que les fonctions proposées sont solutions. Pour la réciproque, choisir une solution g et étudier la dérivée de $g(t)e^{-at}$. $\square$

Exercice 6. ex 61 p 112

4 Équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème 6. Soit a un nombre réel non nul et b un nombre réel. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $y(t) = Ke^{at} - \frac{b}{a}$, où K est une constante réelle.

Démonstration. À faire... Indication : pour la réciproque, poser $h = g + \frac{b}{a}$, où g est une solution de l'équation différentielle. $\square$

Exercice 7. Exercices 59, 60 p 112, TD3 pp. 102-103.