Nombres complexes

Laurent Zamo

25 septembre 2008

Résumé

Une approche géométrique des nombres complexes pour la classe de terminale Scientifique.

Table des matières

1 Dans R : calcul et géométrie **2**
1.1 Addition : translation 2
1.2 Produit : homothétie 2
1.3 Produit par -1 : demi-tour 2
1.4 Opérations successives 3

2 Le nombre i, les imaginaires purs **3**

3 Les nombres complexes **4**

4 Addition dans C (translation) **4**
4.1 Soustraction (affixe d'un vecteur) 5
4.2 Opposé (symétrie par rapport à l'origine) 5

5 Produit dans C **5**
5.1 Produit par un réel (homothétie de centre O) 5
5.2 Produit par i (quart de tour direct) 6
5.3 Produit de nombres complexes 6

6 Module (distance) **6**

7 Conjugué (symétrie d'axe réel) **6**

8 Quotient **6**

1 Dans R : calcul et géométrie

L'ensemble **R** des nombres réels peut être assimilé à une droite munie d'un repère $(O; \overrightarrow{u})$: à chaque point M de la droite on fait correspondre un unique nombre réel x. Réciproquement, à chaque nombre réel x correspond un unique point M de la droite : le point dont x est l'abscisse.

On note alors $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{u}$.

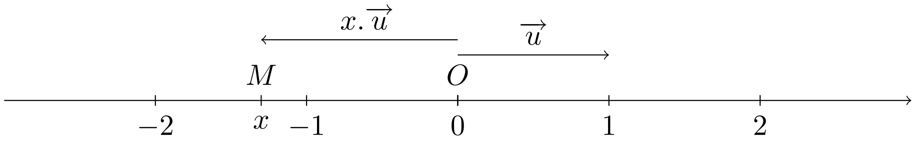


FIG. 1 – La droite des réels.

1.1 Addition : translation

Soient trois points $X(x)$, $B(b)$ et $Y(y)$ de la droite réelle. $x + b = y$ si et seulement si $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OY}$.
On dit que la transformation associée à l'addition $x \mapsto x + b$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

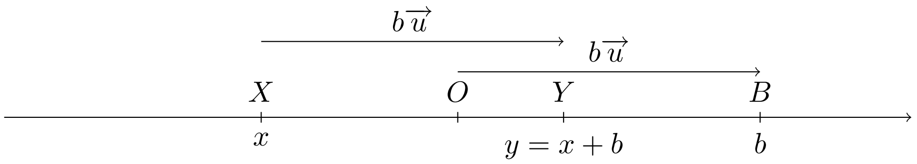


FIG. 2 – Ajouter.

1.2 Produit : homothétie

Soient deux points $X(x)$ et $Y(y)$ de la droite réelle et a un réel. $a.x = y$ si et seulement si $a.\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$.
On dit que la transformation associée au produit $x \mapsto a.x$ est l'homothétie de rapport a et de centre O.

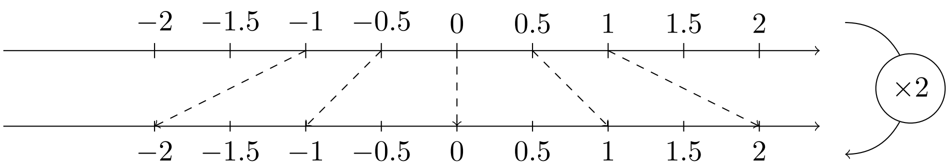


FIG. 3 – Multiplier par 2.

1.3 Produit par -1 : demi-tour

Deux points sont symétriques par rapport à l'origine du repère si et seulement si leurs abscisses sont opposées.
La transformation associée au produit $x \mapsto -1.x$ est la symétrie (ou le demi-tour) de centre O.

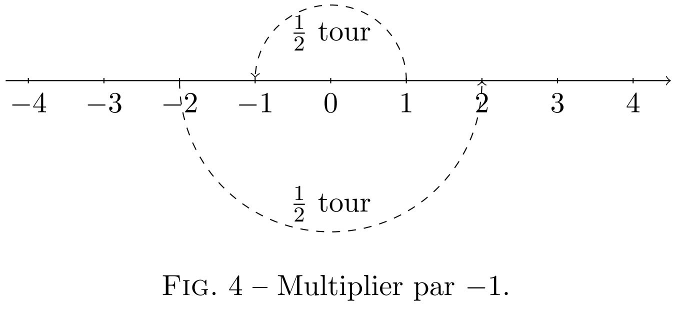


FIG. 4 – Multiplier par -1.

1.4 Opérations successives

Chaque opération algébrique étant associée à une transformation géométrique de la droite réelle, un succession d'opérations est associée à une composition de transformations.

Par exemple, une fonction affine $x \mapsto a.x + b$ est la composée du produit par a (donc une homothétie) et de la somme par b (donc une translation).

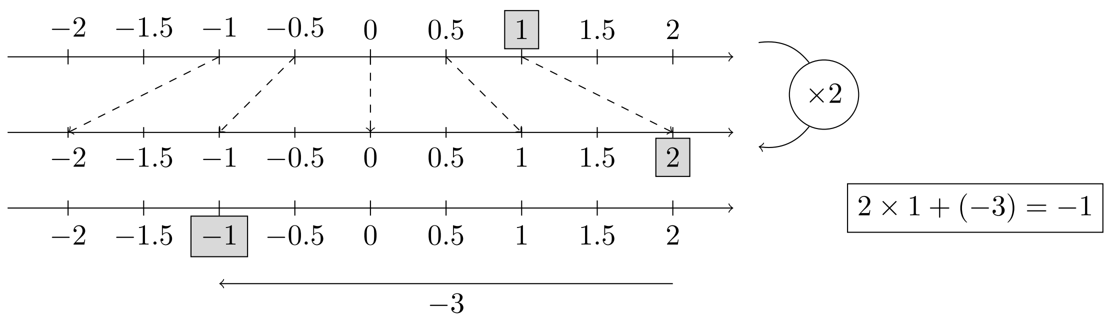


FIG. 5 – Image de 1 par la fonction affine $x \mapsto 2x - 3$.

2 Le nombre i, les imaginaires purs

Si -1 avait une racine carrée i, telle que $i^2 = -1$, il faudrait que la transformation associée à la multiplication par i, composée avec elle-même, donne un demi-tour de centre O.

Une telle transformation "naturelle" est le quart de tour direct de centre O. En effet, la composée de deux quarts de tour consécutifs de centre O donne un demi-tour de centre O.

On définit alors un nouveau nombre, noté i, tel que :
- $i^2 = -1$ (aspect algébrique)
- multiplier par i revient à effectuer un quart de tour direct de centre O (aspect géométrique)

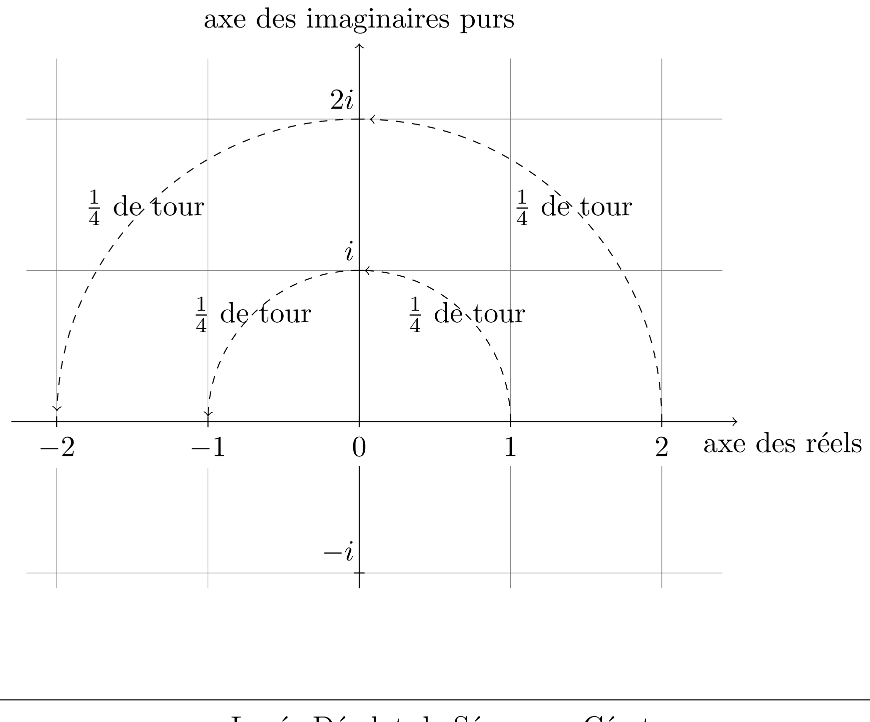
Mais ce nombre ne peut être un réel, il ne peut donc pas être identifié à un point de la droite réelle.

Munissons le plan d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. On assimile l'ensemble des nombres réels à l'axe $(O; \overrightarrow{u})$ appelé **axe des réels**.

Le point associé à i sera l'image du point de coordonnées $(1; 0)$ par le quart de tour direct de centre O, il aura donc pour coordonnées $(0; 1)$.

On peut alors définir les nombres $b.i$ (où b est un nombre réel) : ils correspondent aux points de coordonnées $(0; b)$. On les appelle **imaginaires purs**.

On vérifie que le point correspondant au nombre $b.i$ est à la fois :
- l'image du point correspondant au nombre i par l'homothétie de centre O et de rapport b ;
- l'image du point correspondant à b par un quart de tour direct de centre O.



3 Les nombres complexes

Pour toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. À chaque nombre réel a correspond un unique point $A(a; 0)$. À chaque imaginaire pur $b.i$ (où b est un réel) correspond un unique point $B(0; b)$.

En considérant qu'une somme de nombres correspond à une somme de vecteurs, comme dans $\mathbf{R}$, on peut définir le **nombre complexe** $z = a + b.i$ et son **point image** M, avec $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. On dit que z est l'**affixe** de M. Le réel a est la **partie réelle** de z (notée $\mathcal{R}e(z)$) et le réel b est la **partie imaginaire** de z (notée $\mathcal{I}m(z)$).

Si M a pour affixe z, on dit que $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z, et z l'**affixe** de $\overrightarrow{OM}$.

Pour tout nombre complexe z, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tels que $z = a + b.i$. On dit que $a + b.i$ est la **forme algébrique** de z.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbf{C}$.

Théorème 1. Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

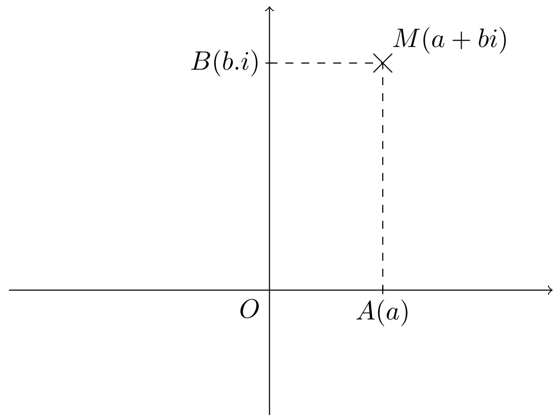


Fig. 7 – Le point M d'affixe $a + b.i$.

4 Addition dans C (translation)

Le principe est le même que dans $\mathbf{R}$:

Soient deux points A et B du plan, d'affixes respectives a et b. On définit le nombre complexe $c = a + b$ comme l'affixe du point C tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

L'addition des nombres complexes, comme l'addition des vecteurs, est commutative : $a+b = b+a$, quels que soient a et b complexes.

Des théorèmes de géométrie, on déduit que les trois propositions :

- $a + b = c$;
- $OACB$ est un parallélogramme ;
- C est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$;

sont équivalentes.

Théorème 2. Si $z = x + y.i$ et $z' = x' + y'.i$ (où x, x', y et y' sont des réels), alors $z + z' = (x + x') + (y + y').i$.

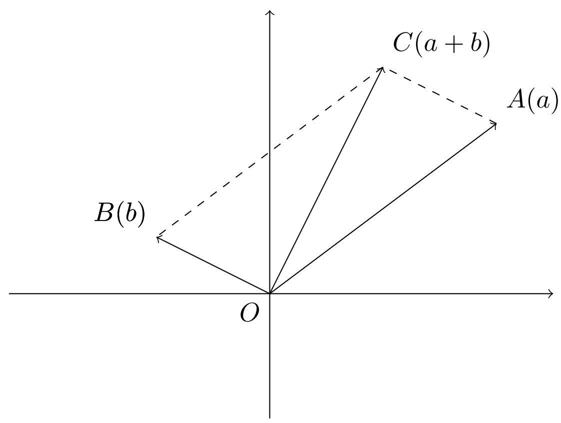


Fig. 8 – Le point C d'affixe $a + b$.

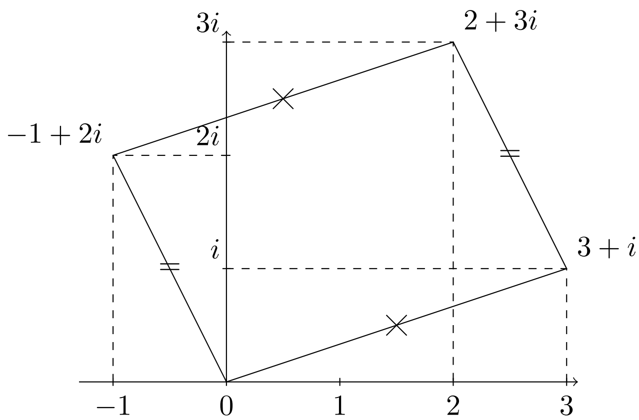


Fig. 9 – $(-1 + 2i) + (3 + i) = 2 + 3i$

4.1 Soustraction (affixe d'un vecteur)

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c.

$$\begin{aligned} & a+b &=& \; c \\ \Leftrightarrow \; & \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} &=& \; \overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow \; & \overrightarrow{OA} &=& \; \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

(Il est naturel de définir ainsi la différence $a = c - b$.)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \; & \overrightarrow{OA} &=& \; \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO} \\ \Leftrightarrow \; & \overrightarrow{OA} &=& \; \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux, leurs affixes sont donc égales.

Théorème 3. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $c - b$.

Théorème 4. Si $z = x + y.i$ et $z' = x' + y'.i$ (où x, x', y et y' sont des réels), alors $z - z' = (x - x') + (y - y').i$.

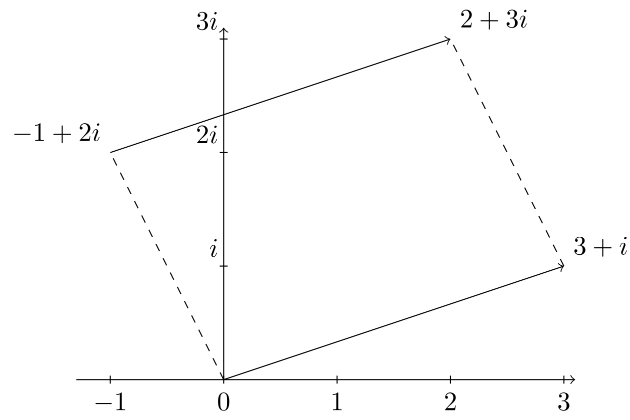


FIG. 10 – Différence : $(2 + 3i) - (-1 + 2i) = 3 + i$.

4.2 Opposé (symétrie par rapport à l'origine)

Soient M un point d'affixe z.

On définit l'**opposé** de z comme dans $\mathbf{R}$: c'est le nombre $-z$ tel que $z + (-z) = 0$. Ainsi $-z$ est l'affixe du point N tel que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{0}$. N est donc le symétrique de M par rapport à O.

Les nombres complexes sont opposés si et seulement si leurs vecteurs images sont opposés.

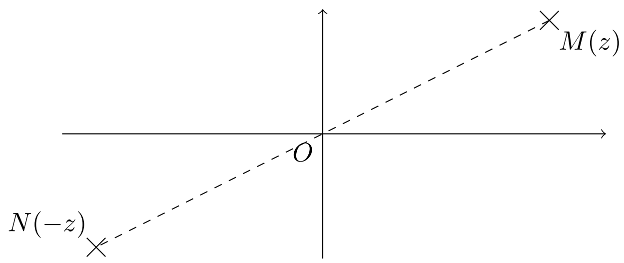


FIG. 11 – Deux nombres complexes opposés.

5 Produit dans C

5.1 Produit par un réel (homothétie de centre O)

Le produit d'un nombre complexe par un réel suit le même principe que le produit dans $\mathbf{R}$: soient deux points $M(z)$ et $N(z')$ du plan et a un réel. On pose $a.z = z'$ si et seulement si $a.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$. Autrement dit : N est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport a.

En particulier, la multiplication par -1 correspond à la symétrie de centre O : $(-1) \times z = z'$ si et seulement si $-\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$. On vérifie que $z + (-1) \times z = 0$ c'est-à-dire que les nombres :

- $(-1) \times z$ (défini en tant que produit, par une homothétie)
- et $-z$ (défini en tant qu'opposé de z, à partir de l'addition)

sont égaux.

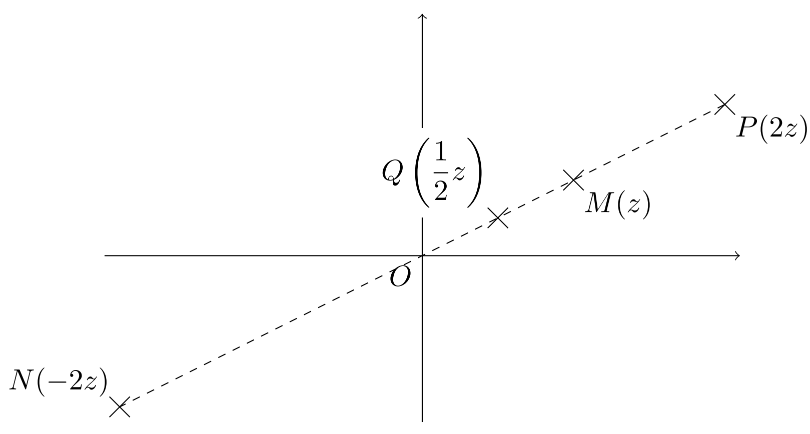


FIG. 12 – Différents produits

5.2 Produit par i (quart de tour direct)

Soient deux points $M(z)$ et $N(z')$ du plan. On pose $z' = z.i$ si et seulement si N est l'image de M par le quart de tour direct de centre O.

Or, en considérant les coordonnées réelles $(x; y)$ de M, on voit que le point N admet pour coordonnées $(-y; x)$ et pour affixe $-y + x.i$.

Donc, si x et y sont des réels, on a : $(x + y.i).i = -y + x.i$.

D'autre part, si on distribue i dans le produit ci-dessus, on obtient :

$$(x + y.i).i = x.i + y.i.i = x.i - y$$

On retrouve l'affixe du point N défini par rotation.

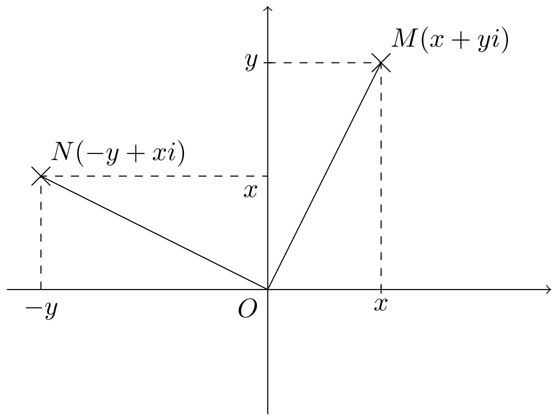


FIG. 13 – Multiplication par i.

5.3 Produit de nombres complexes

On admet les propriétés suivantes. Pour tous nombres complexes z_1, z_2 et z_3 :

1. $z_1.z_2 = z_2.z_1$ (la multiplication est commutative)
2. $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (distributivité)

et, plus généralement, les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbf{R}$.

On définit, comme dans $\mathbf{R}$, les puissances entières d'un nombre complexe : si $z \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^\star - \{1\}$, on note $z^n = \underbrace{z \times \ldots \times z}_{n \text{ facteurs}}$. Avec la convention $z^1 = z$ et, pour $z \neq 0$, $z^0 = 1$.

En particulier, si on connaît les formes algébriques de deux nombres complexes, on peut déterminer la forme algébrique de leur produit. Pour tous réels x, y, x' et y', on obtient, en utilisant la distributivité :

$(x + y.i).(x' + y'.i) = (x.x' - y.y') + (x.y' + x'.y).i$

Ainsi que :

Théorème 5. Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Par contre, les théorèmes sur la comparaison de nombres n'ont plus lieu d'être (un carré de nombre complexe peut ne pas être positif, la "règle des signes" ne s'applique pas...).

6 Module (distance)

7 Conjugué (symétrie d'axe réel)

8 Quotient